Schon wieder am Brandenburger Tor...

Lösung:
Um die nach dem Nächster-Nachbar-Verfahren bestimmte Tour zu entkreuzen, gehst du wie folgt vor: Zunächst entfernst du die sich kreuzenden Verbindungsstrecken $\overline{AP}$ und $\overline{CE}$. Anschließend verbindest du Punkt E mit Punkt P und Punkt A mit Punkt C (Abb. 7). Du kannst überprüfen, dass so wieder eine zulässige Tour entsteht. Gegenüber der ursprünglichen Tour verkürzt sich die neue Tour um die Längen der entfernten Verbindungen $\overline{AP}$ und $\overline{CE}$ und verlängert sich um die Längen der neu hinzugekommenen Verbindungen $\overline{AC}$ und $\overline{EP}$. Insgesamt verringert sich dabei die Länge der Tour (in km) um

$$\begin{aligned} &|\overline{AP}| + |\overline{CE}| - \left(|\overline{AC}| + |\overline{EP}|\right) \\ =\ &\sqrt{13} + 1 - 2\sqrt{2} \\ \approx\ &1{,}78. \end{aligned}$$

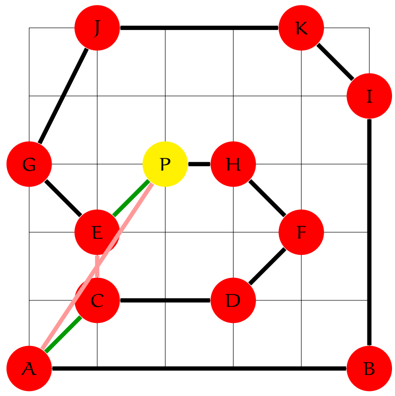

Abbildung 7: Die sich kreuzenden Verbindungsstrecken werden ausgetauscht. Die entfernten Verbindungsstrecken sind in rosa, die neu hinzugekommenen Verbindungsstrecken sind in grün gekennzeichnet.

Die neu entstandene Tour (Abb. 7) ist also nicht nur kreuzungsfrei sondern auch kürzer. Die Idee hinter diesem Verfahren ist simpel: Du ersetzt zwei sich kreuzende Verbindungsstrecken durch zwei nicht gekreuzte, die dieselben vier Punkte verbinden. Jedes Mal wenn du das machst, wird die Tour garantiert kürzer. Warum dies so ist, siehst du in der folgenden Abbildung 8.

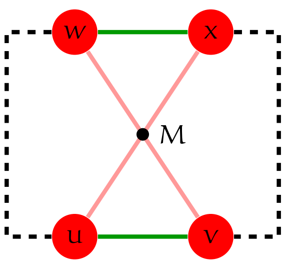

Abbildung 8: In jeder beliebigen Tour lassen sich kreuzende Verbindungsstrecken austauschen. Die entfernten Verbindungsstrecken sind in rosa, die neu hinzugekommenen Verbindungen sind in grün markiert.

Stell dir vor, die Strecken $\overline{UX}$ und $\overline{VW}$ sind zwei sich kreuzende Verbindungsstrecken einer Tour. Ersetzt du diese beiden Strecken durch die Strecken $\overline{WX}$ und $\overline{UV}$, so erhältst du eine kreuzungsfreie Tour. Um zu zeigen, dass sich die Gesamtlänge der Tour verringert hat, zerlegst

Autoren: Max Klimm, TU Berlin, Katharina Skutella, HU Berlin
CC BY SA

du die Strecke $\overline{UX}$ in die beiden Teilstrecken $\overline{UM}$ und $\overline{MX}$ und entsprechend die Strecke $\overline{VW}$ in die beiden Teilstrecken $\overline{VM}$ und $\overline{MW}$. Jetzt siehst du zwei Dreiecke $\triangle UVM$ und $\triangle WMX$. Dass die kreuzungsfreie Tour stets kürzer ist, liegt daran, dass zwei Seiten eines Dreiecks zusammen immer kürzer sind als die dritte. Das nennt man die Dreiecksungleichung.
Mit der Dreiecksungleichung kannst du also die Streckenlänge $|\overline{WX}|$ nach oben abschätzen durch die Längen der Teilstrecken $\overline{MW}$ und $\overline{MX}$:

$$|\overline{WX}| < |\overline{MW}| + |\overline{MX}|.$$

Entsprechend schätzt du die Streckenlänge $|\overline{UV}|$ nach oben ab:

$$|\overline{UV}| < |\overline{UM}| + |\overline{VM}|.$$

Addiere die beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}|\overline{WX}| + |\overline{UV}| &< |\overline{MW}| + |\overline{MX}| + |\overline{UM}| + |\overline{VM}| \\ &= \left(|\overline{VM}| + |\overline{MW}|\right) + \left(|\overline{UM}| + |\overline{MX}|\right) \\ &= |\overline{VW}| + |\overline{UX}|\end{aligned}$$

Also sind die Längen der neuen Verbindungsstrecken in Summe kürzer als die Längen der entfernten Verbindungsstrecken. Insbesondere wird die Tour durch das Entkreuzen kürzer.
Eine kürzeste Tour muss somit immer kreuzungsfrei sein. Andernfalls könntest du ihre Gesamtlänge verringern, indem du die Kreuzung entfernst.

What's Math got to do with it?
Autoren: Max Klimm, TU Berlin, Katharina Skutella, HU Berlin
cc BY SA